Exponentielle untere Schranken zur Lösung infinitärer Auszahlungsspiele und linearer Programme

Oliver Friedmann

Zusammenfassung der Doktorarbeit

Paritätsspiele bilden eine faszinierende Klasse infinitärer Auszahlungsspiele, deren Lösung äquivalent zur Lösung wichtiger Probleme der automatischen Verifikation und Automatentheorie ist. Sie bilden ferner eine sehr natürliche Unterklasse der *Auszahlungsspiele*, die selbst wiederum eine natürliche Teilklasse der *stochastischen Auszahlungsspiele* beschreiben. Aus theoretischer Sicht gehört das Lösen dieser Spiele zu den wenigen Problemen, die in der Komplexitätsklasse $\mathtt{NP} \cap \mathtt{coNP}$ enthalten sind, darüber hinaus kann man zeigen, dass das Lösen in den Klassen $\mathtt{UP} \cap \mathtt{coUP}$ und $\mathtt{PLS}$ enthalten ist. Die Frage, ob eine Klasse dieser Spiele in deterministischer Polynomialzeit gelöst werden kann, gilt als ein wichtiges offenes Problem.

Strategieverbesserung ist eine der wichtigsten algorithmischen Methoden zur Lösung infinitärer Auszahlungsspiele. Sie wird durch eine sogenannte *Verbesserungsregel* parametrisiert, die darüber entscheidet, wie von einer Strategie in der Iteration zur nächsten fortzuschreiten ist. Es ist ein wichtiges offenes Problem, ob es eine Verbesserungsregel gibt, die in einem Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung einer der genannten Spieleklassen resultieren würde.

Lineares Programmieren ist eines der wichtigsten Berechnungsprobleme und wird von Wissenschaftlern der Informatik, Mathematik und im Bereich des Operations Research untersucht. Es wurden vermutlich mehr Artikel und Bücher über lineares Programmieren geschrieben als über alle anderen Berechungsprobleme zusammen.

Der *Simplex*- und der *Dual-Simplex*-Algorithmus gehören zu den in der Praxis am häufigsten eingesetzten Algorithmen zur Lösung *linearer Programme*. Simplexverfahren zur Lösung linearer Programme sind eng mit den Strategieverbesserungsalgorithmen verwandt. Ähnlich wie die Strategieverbesserung wird der Simplexalgorithmus durch ein sogenannte *Pivotregel* parametrisiert, die festlegt, wie von einer Basislösung im linearen Programm zur nächsten überzugehen ist. Es ist ein wichtiges offenes Problem, ob es eine Pivotregel gibt, die in einem (starken) Polynomialzeitalgorithmus zur Lösung linearer Programme resultieren würde.

Unser Beitrag zur Strategieverbesserung und zum Simplexverfahren besteht in der Konstruktion exponentieller unterer Schranken für mehrere Verbesserungs-

bzw. Pivotregeln. Für jede Verbesserungsregel, die wir in dieser Arbeit unter die Lupe nehmen, konstruieren wir Zweispieler-*Paritätsspiele*, zu deren Lösung der entsprechend parametrisierte Strategieverbesserungsalgorithmus eine exponentielle Anzahl an Iterationen benötigt. Anschließend übersetzen wir diese Spiele in Einspieler-*Markov-Entscheidungsprozesse*, die wiederum beinahe direkt in konkrete lineare Programme überführt werden können, zu deren Lösung der entsprechende parametrisierte Simplexalgorithmus dieselbe Anzahl an Iterationen benötigt. Zusätzlich zeigen wir, wie sich die unteren Schranken auf expressivere Spieleklassen wie Auszahlungs- und stochastische Auszahlungsspiele übertragen lassen.

Insbesondere zeigen wir exponentielle untere Schranken für die deterministischen *switch all* und *switch best* Verbesserungsregeln zur Lösung von Spielen, für die seit der Einführung von Howards Strategieverbesserungsalgorithmus im Jahre 1960 keine nicht-trivialen unteren Schranken bekannt waren. Darüber hinaus beweisen wir exponentielle untere Schranken für die zwei natürlichsten und am gründlichsten erforschten randomisierten Pivotregeln, nämlich für die *random facet* und die *random edge* Regeln zur Lösung von Spielen und linearen Programmen, für die jahrzehntelang keine nicht-trivialen unteren Schranken bekannt waren. Zusätzlich beweisen wir eine exponentielle untere Schranke für die randomisierte *switch half* Regel zur Lösung von Spielen, die als wichtigste randomisierte multi-switching Regel gilt. Außerdem beweisen wir eine exponentielle untere Schranke für die natürlichste und berühmteste memoisierende Pivotregel von Zadeh zur Lösung von Spielen und linearen Programmen, und lösen damit ein dreißig Jahre lang offenes Problem.

Schließlich beweisen wir exponentielle untere Schranken für zwei andere algorithmische Verfahren zur Lösung von Paritätsspielen, nämlich für den *Model Checking Algorithmus* von Stevens und Stirling sowie für den *rekursiven Algorithmus* von Zielonka.